令和４年　大学入試共通テスト（数学 II・数学 B）の略解と解説

一昨日　冗　著

注意：　答えは，赤文字 or 赤数字で示す。

第１問.　［1］　座標平面上に点 A$(-8,\ 0)$ をとる。また，不等式

$$x^2+y^2-4x-10y+4 \leqq 0$$

の表す領域を D とする。

(1) 領域 D について，次の $\boxed{}$ に当てはまる答えを求めよ（数または選択番号を記入する）。

解答）与えられた不等式をまとめると，

$$x^2-4x+4+y^2-10y+25 \leqq 25 \quad \to \quad (x-2)^2+(y-5)^2 \leqq 5^2$$

だから，領域 D は，中心が点 $(2,\ 5)$，半径が 5 の円の内部である。

以下，点 $(2,\ 5)$ を Q とし，方程式

$$x^2+y^2-4x-10y+4=0$$

の表す図形を C とする。

(2) 点 A を通る直線と領域 D が共有点を持つのはどのようなときかを考えよう。以下の $\boxed{}$ に当てはまる答えを求めよ。

解答）(i) (1) により，直線 $y=$ 0 は点 A を通る C の接線の一つとなることがわかる。

太郎さんと花子さんは点 A を通る C のもう一つの接線について話し合っている。点 A を通り，傾きが k の直線を l とする。

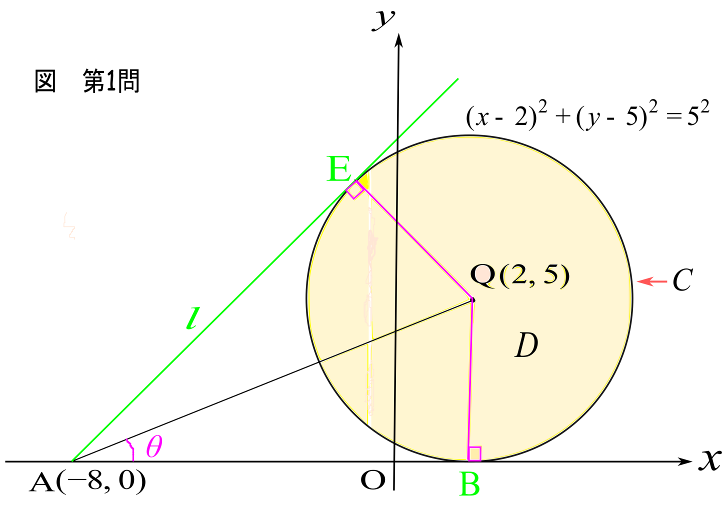
(対話）－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

太郎：　直線 l の方程式は　$y=k(x+8)$　と表すことができるから，
　　これを　$x^2+y^2-4x-10y+4=0$　に代入することで接線を求められそうだね。

花子：　x 軸と直線 AQ のなす角のタンジェントに注目することでも求められそうだよ。

－－

（問題となっている曲線のグラフなどは，下の図を参照せよ）



(ii) 太郎さんの求め方について考えて見よう。

$y=k(x+8)$　を　$x^2+y^2-4x-10y+4=0$　に代入すると，x についての２次方程式

$$(k^2+1)x^2+(16k^2-10k-4)x+64k^2-80k+4=0$$

が得られる。この方程式が重解をもつときの k の値が接線の傾きとなる。

(iii) 花子さんの求め方について考えて見よう。

x 軸と直線 AQ のなす角を θ $\left(0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，上の図より

$$\tan\theta = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

であり，直線 $y=0$ と異なる接線の傾きは $\tan 2\theta$ と表すことができる。（なぜならば，$\triangle\mathrm{ABQ} \equiv \triangle\mathrm{AEQ}$ より，$\angle\mathrm{BAQ} = \angle\mathrm{EAQ} = \theta$.）

(iv) 点 A を通る C の接線のうち，直線 $y=0$ と異なる接線の傾きを k_0 とする。このとき，(ii) または (iii) の考え方を用いることにより（花子さんの考えの方が，計算が易しい）

$$k_0 = \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

であることがわかる。

直線 l と領域 D が共有点を持つような k の値の範囲は $0 \leqq k \leqq k_0$ である。

解説）円と直線についての基本的な問題ですね。(1) は全部レベル４，(2) の (i) はレベル４，(ii) はレベル 3.5，(iii) の キ，ク はレベル 3.5，ケはレベル３だね。(iv) は全部レベル３ですね。これは，最初の問題として易しいものを持ってきたと考えていいですね。全員ができたことであろうと推察します。

［２］ a, b は正の実数であり，$a \neq 1,\ b \neq 1$ を満たすとする。太郎さんは $\log_a b$ と $\log_b a$ の大小関係を調べることにした。以下の $\boxed{}$ に当てはまる答えを求めよ。

解答）(1) 太郎さんは次のような考察をした。

まず，$\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$，$\log_9 3 = \dfrac{1}{2}$ である。この場合 $\log_3 9 > \log_9 3$ が成り立つ。

一方，$\log_{\frac{1}{4}} 8 = -\dfrac{3}{2}$，

（この答え 8 は，これを x とおいたとき，$x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{4} \rightarrow x = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} = 2^3$ よりわかる）

$\log_8 \dfrac{1}{4} = -\dfrac{2}{3}$ である。この場合 $\log_{\frac{1}{4}} 8 < \log_8 \dfrac{1}{4}$ が成り立つ。

(2) ここで，$\log_a b = t$ $\cdots$ ① とおく。(1) の考察をもとにして，太郎さんは次の式が成り立つと推測し，それが正しいことを確かめることにした。

$$\log_b a = \frac{1}{t} \quad \cdots \quad ②$$

① により，$a^t = b$ である。このことにより $a = b^{\frac{1}{t}}$ が得られ，② が成り立つことが確かめられる。

(3) 次に，太郎さんは (2) の考察をもとにして

$$t > \frac{1}{t} \quad \cdots \quad ③$$

を満たす実数 $t\ (t \neq 0)$ の値の範囲を求めた。

－－－－＜太郎さんの考察＞－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

$t > 0$ ならば，③ の両辺に t を掛けることにより，$t^2 > 1$ を得る。

このよな $t\ (t > 0)$ の値の範囲は $1 < t$ である。

$t < 0$ ならば，③ の両辺に t を掛けることにより，$t^2 < 1$ を得る。

このよな $t\ (t < 0)$ の値の範囲は $-1 < t < 0$ である。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

この考察により，③ を満たす t $(t \neq 0)$ の値の範囲は

$$-1 < t < 0, \quad 1 < t$$

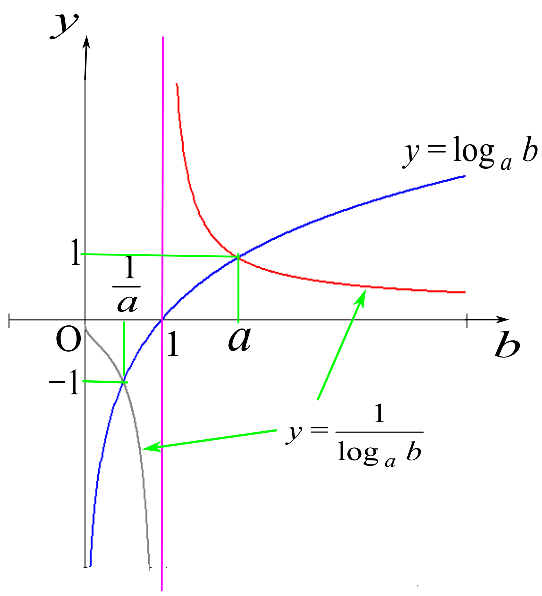
であることがわかる。

ここで，a の値を一つ定めたとき，不等式

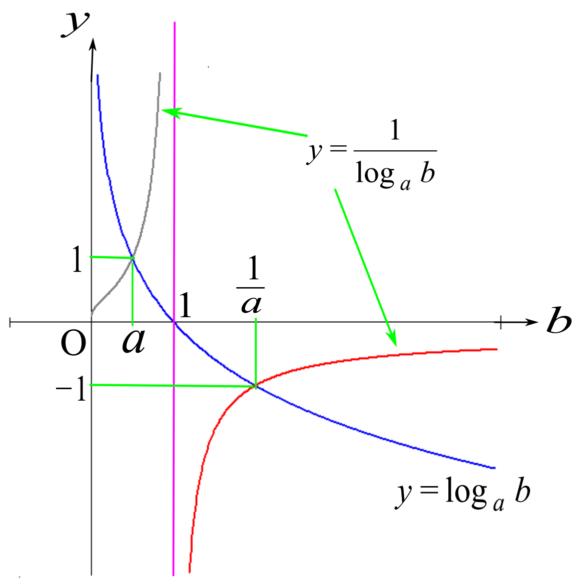
$$\log_a b > \log_b a \left(= \frac{1}{\log_a b}\right) \qquad \cdots \quad ④$$

を満たす実数 b ($b > 0,\ b \neq 1$) の値の範囲について考える。

さて，式④の関数　$y = \log_a b$　とその逆数からなる関数のグラフを描けば，次のようになる。



図A　$a > 1$ のとき



図B　$0 < a < 1$ のとき

このようなグラフを試験中に描くのはちょっと大変だが，これらを描くことができないと答えを出すのは難しい。ということで，④を満たす b の値の範囲は，$a > 1$ のときは（図 A より），$\frac{1}{a} < b < 1,\ \ a < b$ であり，$0 < a < 1$ のときは（図 B より） $0 < b < a,\ \ 1 < b < \frac{1}{a}$ である。

(4) $p = \frac{12}{13},\ q = \frac{12}{11},\ r = \frac{14}{13}$ のとき，次の 4 つの不等式のうち，正しいものを選べ。

⓪ $\log_p q > \log_q p$ かつ $\log_p r > \log_r p$
① $\log_p q > \log_q p$ かつ $\log_p r < \log_r p$
② $\log_p q < \log_q p$ かつ $\log_p r > \log_r p$
③ $\log_p q < \log_q p$ かつ $\log_p r < \log_r p$

解答）２つの不等式　$\log_p q > \log_q p,\ \ \log_p r > \log_r p$　が成り立つか否かを調べればよい。第 1 の不等式は，$0 < p < 1$ だから　$1 < q < \frac{1}{p} \quad \cdots \quad ⑤$　を満たしているかを確認すればよい（(3) のツの不等式を参照せよ)。

式⑤は，$1 < \frac{12}{11} = 1.0909 < \frac{1}{p} = \frac{13}{12} = 1.0833$　だから，成り立たない。即ち，第 1 の不等式は成り立たず（偽），不等号は逆でなければならない。

第 2 の不等式を調べよう。やはり $0 < p < 1$ だから　$1 < r < \frac{1}{p}$　が成り立っているか否かを調べる。これは，

$$1 < \frac{14}{13} = 1.0769 < \frac{1}{p} = \frac{13}{12} = 1.0833$$

だから，第 2 の不等式は正しい（真である）。以上より，3 番目の不等式 ② が答えである。

解説）(1) の $\boxed{\text{ス}}$ はレベル 3，$\boxed{\text{セ}}$ はレベル 2.5 だね。(2) の 2 つは，対数の定義を知っていればわかるので，レベル 3 だね。(3) は 1 つの対数関数とその逆数の関数の関係がわからないと解けないね。私の解答のようなグラフがすぐ描けますかね。そこが味噌。レベル 1.5 でしょうか。(4) は，(3) の応用なのだが，(3) の結果をすぐ使えましたか？ しかし，p, q, r の分数を見ているだけで，目がくらくらするよね。そんな訳で，これはレベル 1 かな。しかし，(4) は，この問題をここに持ってきたという必然性がよく分からないね。

第 2 問. ［1］ a を実数とし，$f(x) = x^3 - 6ax + 16$ とおく。以下の $\boxed{}$ に当てはまる答えを求めよ。

解答）(1) $y = f(x)$ のグラフの概形は，(下の図から選ぶと)

$a = 0$ のとき，①， $a < 0$ のとき，⓪ である。

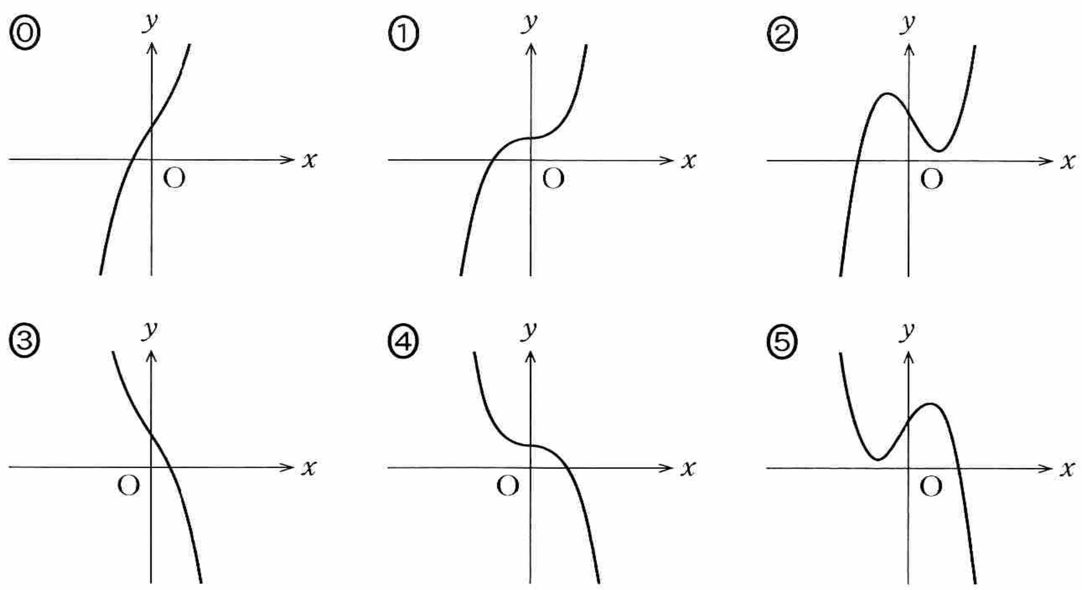


図　第2問 (1)

なぜならば，$y' = 3x^2 - 6a$ より，$a = 0$ のとき，点 $(0, 16)$ を通る接線は傾き 0 である（これ以外の接線は傾き正になる）。また，$a < 0$ のとき，$y' = 3x^2 - 6a > 0$ だから，全ての接線の傾きは正になるので，$y = f(x)$ のグラフは単調増加になるからである。

(2) $a > 0$ とし，p を実数とする。座標平面上の曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = p$ が 3 個の共有点を持つような p の値の範囲は

$$-4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}} + 16 < p < 4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}} + 16$$

である。なぜならば，$y' = 3x^2 - 6a = 0$ を解いて，$x = \pm\sqrt{2a}$ で極値をとることがわかる。下図（左のもの）参照せよ。このとき，極大値と極小値を計算して，1 つにまとめてかくと

$\pm 4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}} + 16$ 　となるからである。

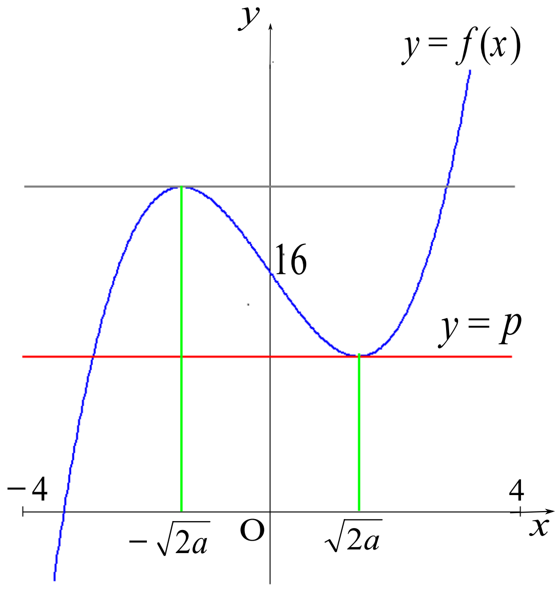


図　(2)

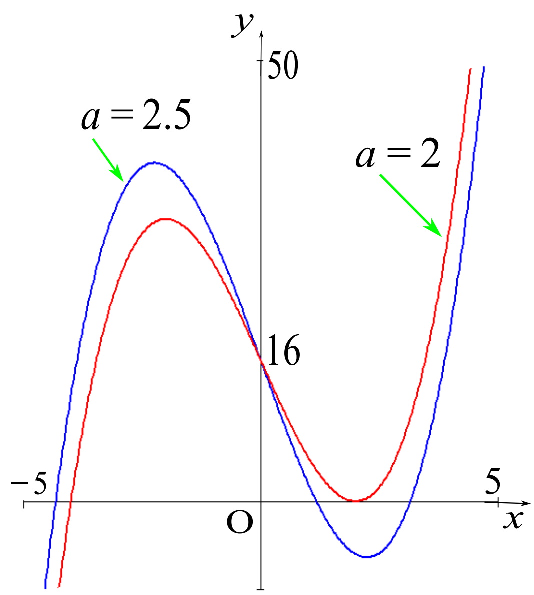


図　(3)

$p=-4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$　のとき，曲線　$y=f(x)$　と直線　$y=p$　は 2 個の共有点をもつ。それらの x 座標を　q, r　$(q<r)$　とする。曲線　$y=f(x)$　と直線　$y=p$　が点　$(r,\ p)$　で接することに注意すると，

$$x^3-6ax+16=-4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16 \quad\to\quad x^3-6ax+4a\sqrt{2a}=0 \quad\to\quad (x-\sqrt{2a}\,)^2(x+2\sqrt{2a})=0$$

より，　$q=-2\sqrt{2}\,a^{\frac{1}{2}}$,　$r=\sqrt{2}\,a^{\frac{1}{2}}$　と表せる。

(3) 方程式　$f(x)=0$　の異なる実数解の個数を n とする。次の ⓪ ～ ⑥ のうち，正しいものを 2 つ選べ。

⓪ $n=1$　ならば　$a<0$　　① $a<0$　ならば　$n=1$
② $n=2$　ならば　$a<0$　　③ $a<0$　ならば　$n=2$
④ $n=3$　ならば　$a>0$　　⑤ $a>0$　ならば　$n=3$

解答）(1) より，① が正しいのは明らか。次に，$y=f(x)$　のグラフが x 軸と接する場合を考えよう。それは，極小値が 0 の時であるから（上図右の赤のグラフを参照せよ）

$$-4a\sqrt{2a}+16=0 \quad\to\quad a\sqrt{2a}=4 \quad\to\quad a^3=8 \quad\therefore\quad a=2.$$

即ち　$n=3$　となる必要十分条件は　$a>2$　である。このことから，④ は正しいことがわかる。
答えは，①, ④ である。

解説）3 次関数について，(1) は極値を持たないときのグラフの形を問うているもので，まあやさしいですね。レベル 4 でしょう。(2) は，極値を持つときの問題で，計算が少々必要なので，ウ，エはレベル 2.5，q, r　の値の計算はレベル 2 でしょう。(3) もレベル 2 と言うところでしょうか。まあまあ，普通のいい問題ですね。

［2］　$b>0$　とし，$g(x)=x^3-3bx+3b^2$,　$h(x)=x^3-x^2+b^2$　とおく。座標平面上の曲線 $y=g(x)$　を C_1，曲線 $y=h(x)$　を C_2　とする。次の $\boxed{}$ に当てはまる答えを求めよ。

解答）C_1　と　C_2　は 2 点で交わる。これらの交点の x 座標をそれぞれ　α, β　$(\alpha<\beta)$　とすると，

$$x^3-3bx+3b^2=x^3-x^2+b^2 \quad\to\quad x^2-3bx+2b^2=0 \quad\to\quad (x-b)(x-2b)=0 \quad\therefore\quad \alpha=b,\ \beta=2b.$$

$\alpha \leqq x \leqq \beta$ の範囲で C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S とする。また，$t > \beta$ とし，$\beta \leqq x \leqq t$ の範囲で C_1 と C_2 および直線 $x = t$ で囲まれた図形の面積を T とする。ここで，下の図を参考にしていただきたい。b の値が 1 に近い時のグラフである。領域 S と T は，小さくて中々わかりにくい。

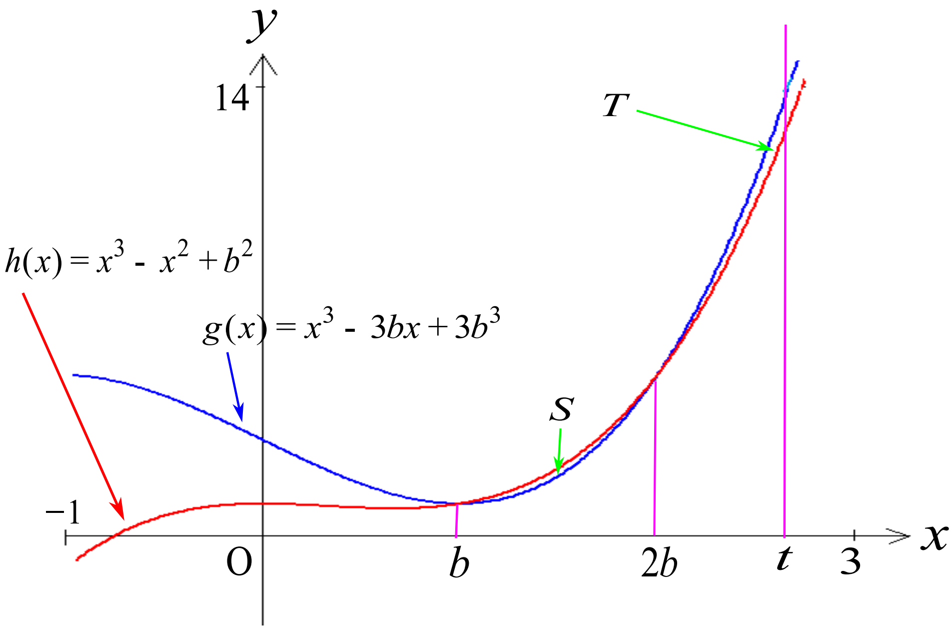


図　第2問 [2]

このとき，　$S = \displaystyle\int_\alpha^\beta \{\ h(x) - g(x)\ \}dx$，　$T = \displaystyle\int_\beta^t \{\ g(x) - h(x)\ \}dx$　である。

さて，　$-T = -\displaystyle\int_\beta^t \{\ g(x) - h(x)\ \}dx = \int_\beta^t \{\ h(x) - g(x)\ \}dx$　より，

$$S - T = \int_\alpha^\beta \{\ h(x) - g(x)\ \}dx + \int_\beta^t \{\ h(x) - g(x)\ \}dx = \int_\alpha^t \{\ h(x) - g(x)\ \}dx \quad \text{であるので，}$$

$$S - T = \int_\alpha^t (-x^2 + 3bx - 2b^2)dx = \int_b^t (-x^2 + 3bx - 2b^2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}bx^2 - 2b^2x \right]_b^t$$

$$= -\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}bt^2 - 2b^2t - \left(-\frac{1}{3}b^3 + \frac{3}{2}b^3 - 2b^3 \right) = -\frac{1}{6}\left(2t^3 - 9\,bt^2 + 12\,b^2t - 5\,b^3 \right)$$

が得られる。

上の最後の式のカッコ内の 3 次方程式は　$(t - b)^2(2t - 5b)$　と因数分解される（この計算は簡単にできるかな；ミソ）。したがって，$S = T$ となるのは　$t = \dfrac{5}{2}b$　のときである。

解説）最初の α，β を求めるのはレベル３，セとソはレベル 2.5，タはレベル２でしょうかね。２つの関数のグラフの位置関係をつかまないと，ちょっと難しいよね。チ以降の計算は注意しないと間違えやすいし，計算量も多いですかね，レベル 1.5 でしょうね。これも，まあまあ適度ないい問題ですね。

第３問.　（正規分布表を用いてもよい問題）

ジャガイモを栽培し販売している会社に勤務する花子さんは，A 地区と B 地区で収穫されるジャガイモについて調べることになった。以下の $\boxed{}$ に当てはまる答えを求めよ。

解答）(1) A 地区で収穫されるジャガイモには 1 個の重さが 200g を超えるものが 25 %含まれることが経験的にわかっている。花子さんは A 地区で収穫されたジャガイモから 400 個を無作為に抽出し，重さを計測した。そのうち，重さが 200g を超えるジャガイモの個数を表す確率変数を Z とする。このとき Z は二項分布　$B(400,\ 0.25)$ に従うから，Z の平均（期待値）は，$400 \times 0.25 = 100$ である。

［注意］二項分布 $B(n,\ p)$ の期待値は np , 標準偏差は $\sqrt{npq}$ （$q = 1-p$）である。また，割合の確率変数 $R = \dfrac{Z}{n}$ は，n が大きいとき，正規分布 $N\left(p,\ \left(\sqrt{\dfrac{pq}{n}}\right)^2\right)$ で近似できる。

(2) Z を (1) の確率変数とし，A 地区で収穫されたジャガイモ 400 個からなる標本において，重さが 200g を超えていたジャガイモの標本における比率を　$R = \dfrac{Z}{400}$　とする。このとき R の標準偏差は $\sigma(R) = \sqrt{\dfrac{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}{400}} = \dfrac{\sqrt{3}}{80}$　である。

標本の大きさ 400 は十分に大きいので，R は近似的に正規分布　$N\left(0.25, \left(\dfrac{\sqrt{3}}{80}\right)^2\right)$　に従う。

したがって，$P(R \geqq x) = 0.0465$　となるような x の値は，0.286 となる。ただし，$\boxed{\text{キ}}$ の計算においては　$\sqrt{3} = 1.73$　とする。

さて，答えを導いた詳細をかこう。下の図を参考にして下さい。

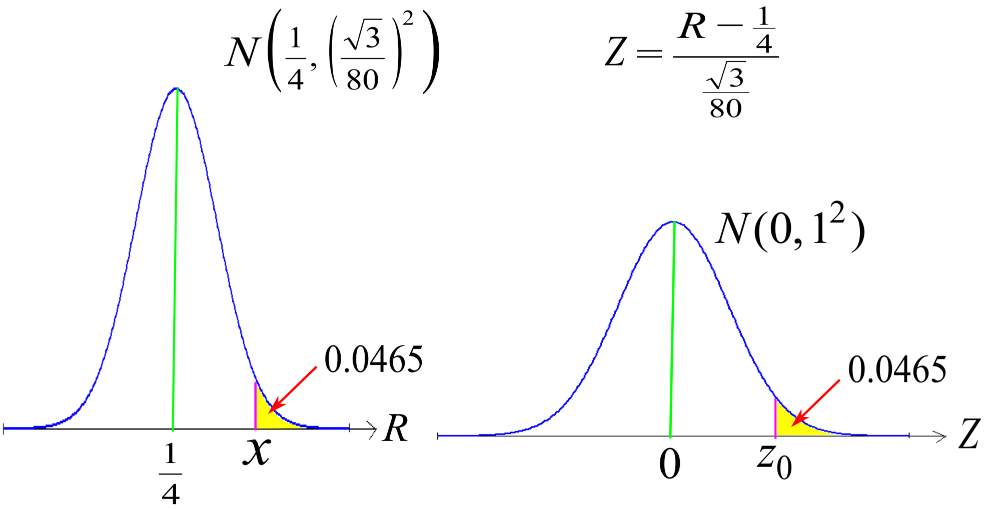


図　2つの正規分布

標準正規分布 $N(0,\ 1^2)$ の表より，$P(Z \geqq z_0) = 0.0465$ となる z_0 は $z_0 = 1.68$ であることがわかる（表からこの数字導けるよね？）。Z と R の関係式（図中の式を見よ）より

$$x = \frac{1}{4} + z_0 \times \frac{\sqrt{3}}{80} = 0.25 + 1.68 \times \frac{1.73}{80} = 0.28637 \cdots = 0.286$$

を得る。（しかし，こんな計算を手計算でするのはいやになっちゃうよね，多くの人は間違うよ，電卓使わしてほしいね）

(3) B 地区で収穫され，出荷される予定のジャガイモ 1 個の重さは 100g から 300g の間に分布している。B 地区で収穫され，出荷される予定のジャガイモ 1 個の重さを表す確率変数を X とするとき，X は連続型確率変数であり，X のとり得る値 x の範囲は $100 \leqq x \leqq 300$ である。

花子さんは，B 地区で収穫され出荷される予定のすべてのジャガイモのうち，重さが 200g 以上のものの割合を見積りたいと考えて。そのために花子さんは，X の確率密度関数 $f(x)$ として適当な関数を定め，それを用いて割合を見積るという方針をたてた。

B 地区で収穫され，出荷される予定のジャガイモから 206 個を無作為に抽出したところ，重さの標本平均は 180g であった。図 1 はこの標本のヒストグラムである。

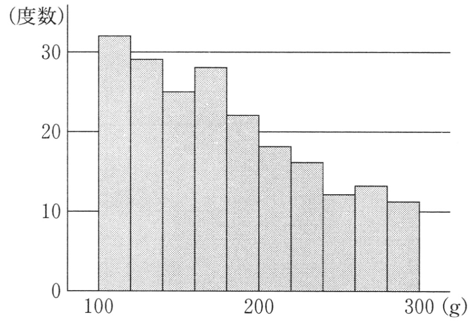


図 1　ジャガイモの重さのヒストグラム

花子さんは図 1 のヒストグラムにおいて，重さ x の増加とともに度数がほぼ一定の割合で減少している傾向に着目し，X の確率密度関数として，1 次関数

$$f(x) = ax + b \qquad (\ 100 \leqq x \leqq 300\ )$$

を考えることにした。ただし，$100 \leqq x \leqq 300$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ とする。以下の $\boxed{}$ に当てはまる答えを求めよ。

解答）このとき，$P(100 \leqq X \leqq 300) = 1$ であることから

$$P(100 \leqq X \leqq 300) = \int_{100}^{300} (ax+b)dx = \frac{a}{2}\Big[x^2\Big]_{100}^{300} + b\Big[x\Big]_{100}^{300}$$

$$= \frac{a}{2}(300^2 - 100^2) + b(300-100) = \frac{a}{2}100^2(3^2-1) + 2 \cdot 10^2 b$$

となるので

$$4 \cdot 10^4 a + 2 \cdot 10^2 b = 1 \qquad \cdots \quad ①$$

である。

花子さんは，X の平均（期待値）が重さの標本平均 180g と等しくなるように確率密度関数を定める方法を用いることにした。

連続型確率変数 X のとり得る値 x の範囲が $100 \leqq x \leqq 300$ で，その確率密度関数が $f(x)$ のとき，X の平均 (期待値）m は

$$m = \int_{100}^{300} xf(x)dx$$

で定義される。この定義と花子さんの採用した方法から

$$m = \frac{26}{3} \cdot 10^6 a + 4 \cdot 10^4 b = 180 \qquad \cdots \quad ②$$

となる。①と②より，

$$\begin{array}{r} \frac{26}{3} \cdot 10^4 a + 4 \cdot 10^2 b = \frac{9}{5} \\ \text{-)}\ 8 \cdot 10^4 a + 4 \cdot 10^2 b = 2 \\ \hline \frac{2}{3} \cdot 10^4 a = -\frac{1}{5} \end{array} \qquad \to \qquad a = -3 \cdot 10^{-5}$$

となる。 $4 \cdot 10^4(-3 \cdot 10^{-5}) + 2 \cdot 10^2 b = 1$ より $b = 11 \cdot 10^{-3}$ を得る（計算は大変だよ）。

よって，確率密度関数は

$$f(x) = -3 \cdot 10^{-5} x + 11 \cdot 10^{-3} \qquad \cdots \quad ③$$

である。このようにして得られた ③ の $f(x)$ は，$100 \leqq x \leqq 300$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ をみたし

ており，確かに確率変数として適当である。

　したがって，この花子さんの方針に基づくと，B 地区で収穫され，出荷される予定のすべてのジャガイモのうち，重さが 200g 以上のものは 35 %あると見積ることができる。この答えは次の計算による（この計算も楽じゃないよ）。

$$
\begin{aligned}
P(200 \leqq X \leqq 300) &= \int_{200}^{300} (-3 \cdot 10^{-5} x + 11 \cdot 10^{-3}) dx \\
&= -\frac{3 \cdot 10^{-5}}{2} \big[x^2\big]_{200}^{300} + 11 \cdot 10^{-3} \big[x\big]_{200}^{300} = -\frac{3 \cdot 10^{-5}}{2} (300^2 - 200^2) + 11 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \\
&= -\frac{3}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-1} + 11 \cdot 10^{-1} = \frac{7}{2} \cdot 10^{-1} = 0.35.
\end{aligned}
$$

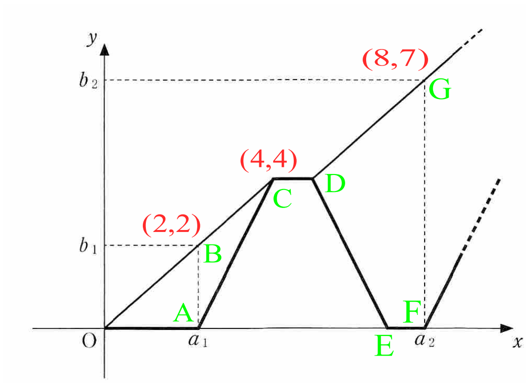
解説）問題文をしっかり読むのは根気がいるね。忍耐力を試されているかもね。(1) は二項分布の基本で，レベル 4 だね。(2) は二項分布の正規近似の問題で，カはレベル 3，キは表を使ったりして，計算がだいぶあるのでレベル 1.5 かな。(3) のクはレベル 4，ケ，コはレベル 2 でしょう。最後の 3 つはレベル 1.5 ですね。しかし，こういう問題ちっとも面白くないよね。統計学がどんな所に使えるか，という例題としては意味があるかもしれないが，出題者がたてた解法のすじ道にしたがって，計算するだけの問題だね。”数学の問題 ”としては合格点やれないね。

第 4 問． 以下のように，歩行者と自転車が自宅を出発して移動と停止を繰り返している。歩行者と自転車の動きについて，数学的に考えてみよう。

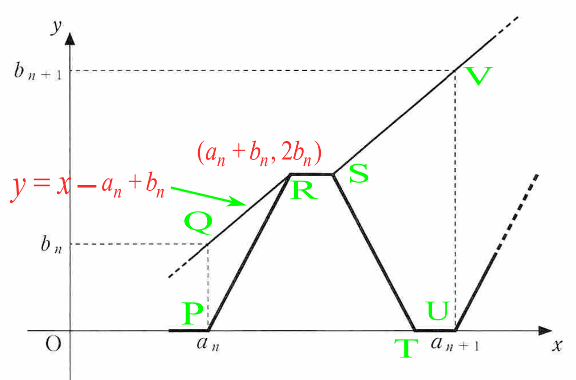
　自宅を原点とする数直線を考え，歩行者と自転車をその数直線上を動く点とみなす。数直線上の点の座標が y であるとき，その点は位置 y にあるということにする。また，歩行者が自宅を出発してから x 分経過した時点を時刻 x と表す。歩行者は時刻 0 に自宅を出発し，正の向きに毎分 1 の速さで歩き始める。自転車は時刻 2 に自宅を出発し，毎分 2 の速さで歩行者を追いかける。自転車が歩行者に追いつくと，歩行者と自転車はともに 1 分だけ停止する。その後，歩行者は再び正の向きに毎分 1 の速さで歩き出し，自転車は毎分 2 の速さで自宅に戻る。自転車は自宅に到着すると，1 分だけ停止した後，再び毎分 2 の速さで歩行者を追いかける。これを繰り返し，自転車は自宅と歩行者の間を往復する。

　$x = a_n$ を自転車が n 回目に自宅を出発する時刻とし，$y = b_n$ をそのときの歩行者の位置とする。以下の文章の $\boxed{}$ に当てはまる答えを求めよ。

解答）(1) 花子さんと太郎さんは，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めるために，歩行者と自転車について，時刻 x において位置 y にいることを O を原点とする座標平面上の点 $(x,\ y)$ で表すことにした。



図A



図B

$a_1 = 2,\ b_1 = 2$ により，自転車が最初に自宅を出発するときの時刻と自転車の位置を表す点の座標は $(2,\ 0)$ であり，そのときの時刻と歩行者の位置を表す点の座標は $(2,\ 2)$ である（図 A を

参照せよ，図には折れ線の頂点の記号や座標などをカラーで書きいれた)。また，自転車が最初に歩行者に追いつくときの時刻と位置を表す点の座標は $(4,\ 4)$ である。よって，

$$a_2 = 8, \quad b_2 = 7$$

である。上の答えは，等脚台形 ACDE をにらみながら図形の各点の座標を求めることができるので，まあ，簡単だよね。もし，方程式で $(a_2,\ b_2)$ を求めたいなら，DG が $y = x - 1$ であるからすぐ求まります。

－－－

花子： 数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ の一般項について考える前に，上の $(4,\ 4)$ の求め方について整理してみようか。

太郎： 花子さんはどうやって求めたの？

花子： 自転車が歩行者を追いかけるときに，間隔が 1 分間に 1 ずつ縮まって行くことを利用したよ。

太郎： 歩行者と自転車の動きをそれぞれ直線の方程式で表して，交点を計算して求めることもできるね。

－－－

自転車が n 回目に自宅を出発するときの時刻と自転車の位置を表す点の座標は $(a_n,\ 0)$ であり，その時の時刻と歩行者の位置を表す点の座標は $(a_n,\ b_n)$ である。よって，n 回目に自宅を出発して自転車が次に歩行者に追いつくときの時刻と位置を表す点の座標は，$a_n,\ b_n$ を用いて $(a_n + b_n,\ 2b_n)$ $\cdots$ ③ と表せる。なぜならば，上の図 B より

$$\text{直線 QR： } y = x - a_n + b_n, \qquad \text{直線 PR： } y = 2(x - a_n)$$

だから，$x - a_n + b_n = 2x - 2a_n$ より，$x = a_n + b_n$ を得る。このとき，$y = 2b_n$ となる。

以上から，数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ について，自然数 n に対して，関係式

$$a_{n+1} = a_n + 2\,b_n + 2 \qquad \cdots \quad ①$$
$$b_{n+1} = 3\,b_n + 1 \qquad \cdots \quad ②$$

が成り立つことがわかる（これらは，図をながめているとわかりますが，あなたはわかったかな)。

まず，$b_1 = 2$ と② から，

$$b_n = 3b_{n-1} + 1 = 3(3b_{n-2} + 1) + 1 = 3^2 b_{n-2} + 3 + 1 = \ \cdots\ = 3^{n-1}b_1 + 1 + 3 + \ \cdots\ + 3^{n-2}$$
$$= 2 \cdot 3^{n-1} + \frac{1 - 3^{n-1}}{1 - 3} = \frac{5}{2}\,3^{n-1} - \frac{1}{2} \qquad (n = 1, 2, 3,\ \cdots\ )$$

を得る。この結果と，$a_1 = 2$ および ① から

$$a_n = a_{n-1} + 5 \cdot 3^{n-2} - 1 + 2 = a_{n-1} + 5 \cdot 3^{n-2} + 1 = a_{n-2} + 5\,(3^{n-3} + 3^{n-2}) + 2 = \ \cdots$$
$$= a_1 + 5\,(1 + 3 + \ \cdots\ + 3^{n-2}\,) + n - 1 = 5 \cdot \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} + n + 1$$
$$= \frac{5}{2}\,3^{n-1} + n - \frac{3}{2} \qquad (n = 1, 2, 3,\ \cdots)$$

がわかる。

(2) 歩行者が $y = 300$ の位置に到着する時までに，自転車が歩行者に追いつく回数は，式 ③ から $2b_n = 5 \cdot 3^{n-1} - 1 \leqq 300$ を満たす最大の n と一致する。$3^{n-1} \leqq \dfrac{301}{5} = 60.2$ より，$n = 4$ (回) である。また，4 回目に自転車が歩行者に追いつく時刻は，$x = a_4 + b_4 = 70 + 67 = 137$ である。

解説）与えられたグラフに，図 A, 図 B のように，必要な数値・式などを正確に書くことができ

ましたか？これができれば，ほぼ半分くらいはできたと言えるでしょう。図 B の実際の大きさは，図 A よりもかなり大きくなりますよ。それも実感できていましたか。

　アはレベル 3.5，イ，ウはレベル３，エ，オはレベル２でしょう。カ以降コまでの漸化式の計算はちょっと難しいのでレベル 1.5 かな。(2) は，(1) ができていても，考えにくいのでレベル１でしょう。まあまあいい問題だが，説明が多く入りすぎだよね。もっと，問題文を簡潔にするべきだと思うよ。花子さん，太郎さんを出す必要はあるのですか？

第５問． 平面上の点 O を中心とする半径 1 の円周上に，3 点 A,B,C があり，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\dfrac{2}{3}$　および　$\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$　を満たすとする。t を　$0<t<1$　を満たす実数とし，

線分 AB を　$t:(1-t)$　に内分する点を P とする。また，直線 OP 上に点 Q をとる。以下の文章の $\boxed{}$ に当てはまる答えを求めよ。

解答）(1) $\theta=\angle\mathrm{AOB}$ とおくと，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta=-\dfrac{2}{3}$　より，$\cos\theta=-\dfrac{2}{3}$　である。

　また，実数 k を用いて　$\overrightarrow{OQ}=k\,\overrightarrow{OP}$　と表せる。したがって，

$\overrightarrow{OQ}=k\,\overrightarrow{OP}=k\left((1-t)\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB}\right)=k(1-t)\,\overrightarrow{OA}+kt\,\overrightarrow{OB}$　$\cdots$　①

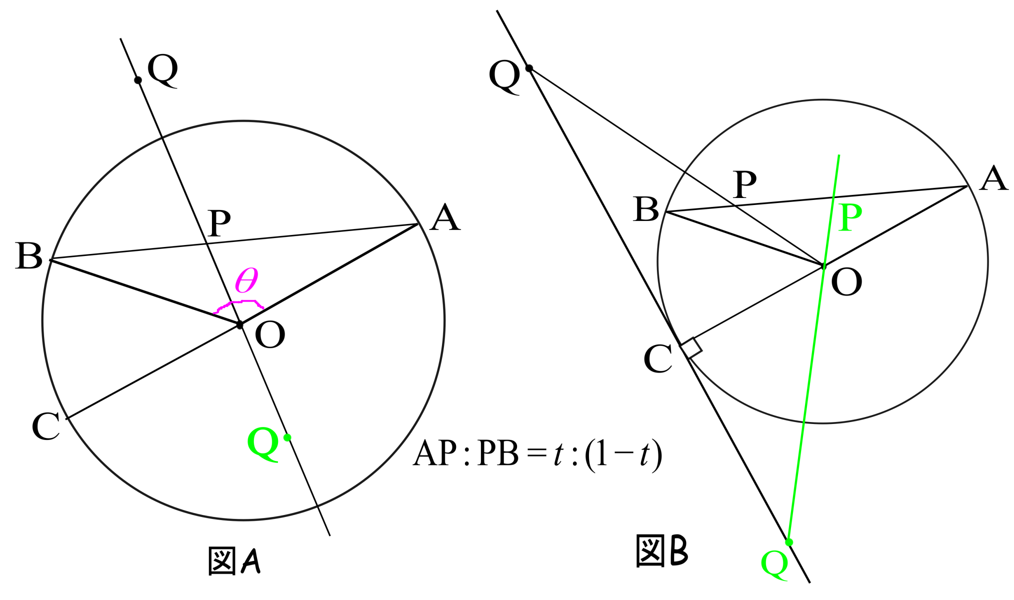
$\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OC}=k(1-t)\,\overrightarrow{OA}+kt\,\overrightarrow{OB}-(-\overrightarrow{OA})=(k-kt+1)\,\overrightarrow{OA}+kt\,\overrightarrow{OB}$

となる。

　また，$\overrightarrow{OA}$　と　$\overrightarrow{OP}$　が垂直となるのは，$\overrightarrow{OA}\cdot\left((1-t)\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB}\right)=0$　より，

$(1-t)\,|\overrightarrow{OA}|^2+t\,|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta=1-t+t\left(-\dfrac{2}{3}\right)=1-\dfrac{5}{3}t=0$　だから，$t=\dfrac{3}{5}$　のとき

である。((1) は，下の図 A 参照のこと）　以下，$t\neq\dfrac{3}{5}$　とし，$\angle\mathrm{OCQ}$ が直角であるとする。



(2) $\angle\mathrm{OCQ}$ が直角であることにより，(1) の k は

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{OA}\cdot\left((k-kt+1)\,\overrightarrow{OA}+kt\,\overrightarrow{OB}\right)=0$　より

$(k-kt+1)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}+kt\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$　$\to$　$(k-kt+1)+kt\left(-\dfrac{2}{3}\right)=0$　$\to$

$k\left(1-\dfrac{5}{3}t\right)=-1 \quad \therefore\ k=\dfrac{3}{5t-3} \quad \cdots$ ② となることがわかる。

平面から直線 OA を除いた部分は，直線 OA を境に二つの部分に分けられる。そのうち，点 B を含む部分を D_1，含まない部分を D_2 とする。また，平面から直線 OB を除いた部分は，直線 OB を境に二つの部分に分けられる。そのうち，点 A を含む部分を E_1，含まない部分を E_2 とする。

・ $0<t<\dfrac{3}{5}$ ならば，点 Q は D_2 に含まれ，かつ E_2 に含まれる。（図 B の緑色の点 Q）

・ $\dfrac{3}{5}<t<1$ ならば，点 Q は D_1 に含まれ，かつ E_1 に含まれる。（図 B の黒色の点 Q）

(3) 太郎さんと花子さんは，点 P の位置と $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ の関係について考えている。

$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，① と ② により， $k=\dfrac{3}{5/2-3}=-6$， $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=-3\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}-3\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ だから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=(-3\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}-3\,\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(-3\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}-3\,\overrightarrow{\mathrm{OB}})=9|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+18\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+9|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$

$$=18+18\left(-\frac{2}{3}\right)=6.$$ よって， $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\sqrt{6}$ とわかる。

太郎： $t\neq\dfrac{1}{2}$ のときにも，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\sqrt{6}$ となる場合があるかな。

花子： $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ を t を用いて表して，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\sqrt{6}$ を満たす t の値について考えればいいと思うよ。

太郎： 計算が大変そうだね。

花子： 直線 OA に関して，$t=\dfrac{1}{2}$ のときの点 Q と対称な点を R としたら，$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=\sqrt{6}$ となるよ。

太郎： $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表すことができれば，t の値が求められそうだね。

直線 OA に関して，$t=\dfrac{1}{2}$ のときの点 Q と対称な点を R とすると

$\overrightarrow{\mathrm{CR}}=-\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=-(-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}-3\overrightarrow{\mathrm{OB}})=2\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ （(1) の式 ① の次の式を見よ）

となる。このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CR}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となる。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ はこのベクトルを縮小したものなので，$(1-t):t=1:3$ （これを満たす t は $t=3/4$）である。以上より，$t\neq\dfrac{1}{2}$ のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\sqrt{6}$ となる t の値は $\dfrac{3}{4}$ である。

解説）この問題は平面上のベクトルを扱っているので，受験生にとってはとっつきやすい問題だったでしょう。(1) のア，イ，ウはレベル 3.5，エ，オ，カ，キはレベル 3 位だね。ク，ケはレベル 2.5 かな。解答の際，図Aや図Bなどがきちんとかけていると解答も楽だよね。(2) のコ，サシはレベル 2，ス，セはレベル 1.5 位かな。(3) のソはレベル 1.5，タ，チツはレベル 2，最後のテ，トはレベル 1 でしょう。この問題でも，太郎さんと，花子さんの会話が出てきますが，これらは本当に必要ですかね？ これらによって，受験者は解法をあまり考えないですむよね。と言うことで，問題が親切すぎるのはあまりいいことじゃないと思いますよ。

総評）今年の問題は，比較的良い問題がそろっていました。重箱の隅をつつくような問題がなかったのでほっとしています。と言うのは，「数学 I，数学 A」では，やたらに難しくまた特殊な問題を出していたのが気にかかっていたからです。しかしながら，問題全体として，説明がくどすぎま

す。太郎さんと花子さんの会話で，解答のすじ道にヒントを与えようとしていますが，これはあまりいいことではないように思います。受験生が「自ら考える問題」ということを目指した共通テストだったはずですが，ちょっと逆行しているようだね。

問題の難易度にレベルを付けましたが，これらの得点を表にしてみました。

表１． 難易度別の配点

レベル	第 1 問 円と直線，交点 対数関数 II	第 2 問 3 次関数 · 極値 積分, 面積 II	第 3 問 二項分布, 正規分布 確率密度関数 B	第 4 問 数列, 漸化式 一般項計算 B	第 5 問 平面上のベクトル 内積, 長さ B
4〜3	20	6	8	3	5
2.5	3	6			2
2		12	2	4	4
1.5	4	6	10	11	6
1	3			2	3
合計	30	30	20	20	20

今年の平均点は，昨年より 16 点程低く，43.06 点でした。問題の内容から予測できないほど低い点数だと思います。多分，コロナ禍の影響で勉強に集中することができなかったことが理由の 1 つだと思われます。「数学 I，数学 A」は過去最低の平均点だったと言うことですが，この試験も似たような結果ですね。

選択の問題で，第 4 問と第 5 問を選んだ学生さんは何％ぐらいいるのでしょう？この選択は点がとりにくいですね。私の推測では，(第 3 問と第 4 問）または（第 3 問と第 5 問）を選んだ学生が多いのではないかと思います。その時の得点の合計は，レベルで考えると次のようになります。

	＜第 3 問，第 4 問を選択＞	＜第 3 問，第 5 問を選択＞
レベル 3 までできると	37 点	39 点
レベル 2.5 〃	46 点	50 点
レベル 2 〃	64 点	68 点
レベル 1.5 〃	95 点	94 点

この得点分布で言うと，平均点程度しか取れなかった学生は，レベル 3 までは大体できて，それ以上のレベルの問題は 2 つ，3っつ位しかできなかったということになります。「数学 I，数学 A」の場合とほぼ同じ傾向ですね。レベル 2 位までは楽にできないと，合格点に達しないでしょう。レベル 2 の問題と言うのは，教科書の例題や問題の中で一番難しいと思われる類のものです。この程度の問題は，教科書を十分理解して（勉強は教科書の隅々まで完全に理解することが 1 番大事なことです），問題集で練習を積めば，楽に解けるようになるでしょう。塾や予備校などに行って，ガツガツ勉強しなくても自分でできますよ。即ち，教科書と参考書・問題集をじっくり学ぶことで，数学の力は確実に身に付きます。数学が面白くなるといいですね。

★ 挑戦せよ若者たち ★ （5 月 13 日 (金)‘22 完，おとといのジョー）